Kitaev 链 & Majorana 表示

一些 Well-defined 的问题

李泽阳

March 26, 2017

Kitaev Chain 的 Hamiltonian 与 Majorana 表示

$$H = \sum_{n=1}^{N-1} (-\omega \hat{c}_{n+1}^\dagger \hat{c}_n + \Delta \hat{c}_{n+1}^\dagger \hat{c}_n^\dagger + \text{h.c.}) - \sum_{n=1}^{N} \mu_n (\hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n - 1/2)$$

用 a, b 两种 Hermitian 的 Majorana 算符表示，
$\hat{a}_n = (\hat{c}_n + \hat{c}_n^\dagger), \hat{b}_n = i(\hat{c}_n^\dagger - \hat{c}_n)$，满足费米对易
$\{\hat{a}_n, \hat{a}_m\} = \{\hat{b}_n, \hat{b}_m\} = 2\delta_{mn}$。从此我们有

$$H = -\frac{i}{2} \sum_{n=1}^{N} [(\omega - \Delta)\hat{a}_n \hat{b}_{n+1} - (\omega + \Delta)\hat{b}_n \hat{a}_{n+1}] - \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{N} \mu_n \hat{a}_n \hat{b}_n \tag{1}$$

考虑 Heisenberg 表象的算符演化：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{a}_n}{\mathrm{d}t} &= -(\omega+\Delta)\hat{b}_{n-1} - (\omega-\Delta)\hat{b}_{n+1} - \mu_n\hat{b}_n \\ \frac{\mathrm{d}\hat{b}_n}{\mathrm{d}t} &= (\omega+\Delta)\hat{a}_{n+1} + (\omega-\Delta)\hat{a}_{n-1} + \mu_n\hat{a}_n\end{aligned} \tag{2}$$

构造本征模式算符 γ，$\gamma_{a/b} = \sum_n (\alpha/\beta)_n (\hat{a}/\hat{b})_n$ 而我们知道，单一"Majorana"表述对于系统来说是不完备的（一个 Fermion=两个 Majorana Fermion），因此构造 $\gamma_a \pm i\gamma_b$ 使得 $[\gamma_a \pm i\gamma_b, H] = \mp E(\gamma_a \pm i\gamma_b)$[1]

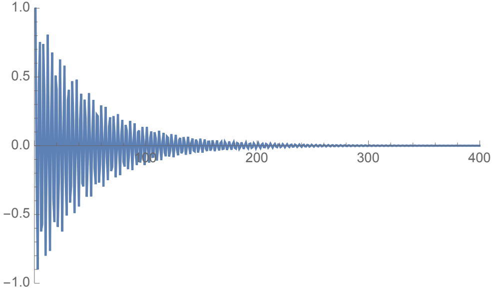
$$\begin{aligned}\mu_n\alpha_n + (\omega-\Delta)\alpha_{n-1} + (\omega+\Delta)\alpha_{n+1} &= E\beta_n \\ \mu_n\beta_n + (\omega-\Delta)\beta_{n-1} + (\omega+\Delta)\beta_{n+1} &= E\alpha_n\end{aligned} \tag{3}$$

[1]可以联想谐振子 $H_{\mathrm{h.o}} = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)$，有 $[a^\dagger, H_{\mathrm{h.o}}] = -\hbar\omega a^\dagger$

我们考虑零能 $E=0$，且每个 site 上化学势平均 $\mu_n=\mu$，我们有

$$\mu\alpha_n + (\omega-\Delta)\alpha_{n-1} + (\omega+\Delta)\alpha_{n+1} = 0$$
$$\mu\beta_n + (\omega-\Delta)\beta_{n-1} + (\omega+\Delta)\beta_{n+1} = 0$$

可以想象，α_n 随 n 的变化就类似斐波那契数列那种感觉变化，如果其特征根绝对值 <1，则会收敛，表明一个边界态



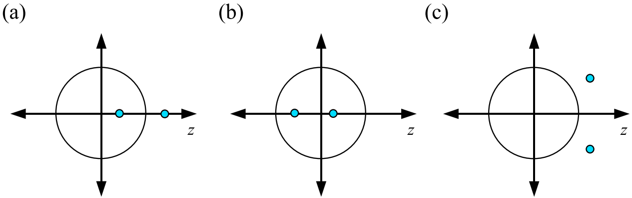


Figure: $\begin{pmatrix} \frac{\mu}{\Delta+\omega} & \frac{\Delta-\omega}{\Delta+\omega} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值分布. (b) & (c) 互为对偶，即 (c) 中的 α 模式实际是 (b) 中的 β 模式。(a) 是拓扑平庸的态，没有边界模式。

Motivation：找到 local 的激发 $\rightarrow \mathcal{ZB}$ 振荡

在特殊的取值 $\omega = t, \mu = 0$，所有的第一激发态简并，从而任意一个 site 上电子/空穴激发都是第一激发态。
猜测：对于稍微偏离简并位置的拓扑取值仍有这种 local 的性质：两个简并的动量本征态某种叠加得到 local 激发。

Local 模式的波函数以及局域性

一般的我们可以写出(3)中的本征值问题：

$$
\begin{pmatrix}
\mathbf{0} & \begin{matrix} \mu & \omega-\Delta & 0 & \cdots \\ \omega+\Delta & \mu & \omega-\Delta & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \omega+\Delta & \mu \end{matrix} \\
\begin{matrix} \mu & \omega+\Delta & 0 & \cdots \\ \omega-\Delta & \mu & \omega+\Delta & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \omega-\Delta & \mu \end{matrix} & \mathbf{0}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix}
= E
\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix}
$$

Excitation gallery

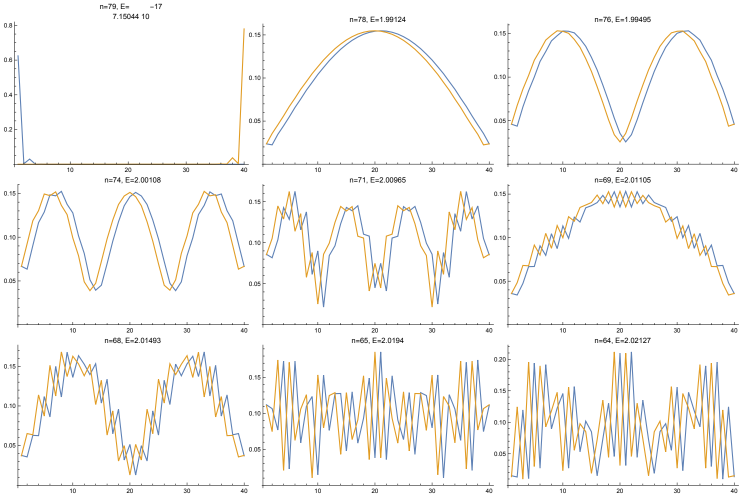


Figure: 最小的 9 个电子型激发的 “波函数”。

Energy spectrum

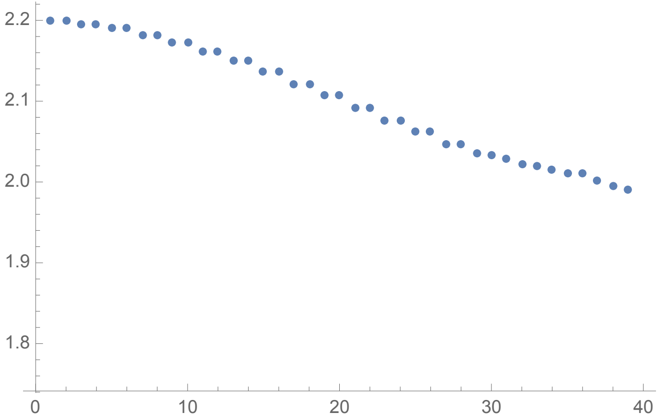


Figure: 激发态能量从大 $\rightarrow$ 小，在能量低的时候可以看到非成对出现的态，可能是“准简并”和有限大小带来的能级耦合 & 相互作用。

如何解读？有何意义？完全不知道。。思考 ing。目前 $N=40$，下一步就是把系统做的更大，看看第一激发态的样子。
此外，另有别的文章提供了思路：加入 $\mu_n=\mu+\lambda_n$ 的局域无序，从而 “人为制造” 局域激发。

相互作用 Kitaev Chain

$$H = \sum_{n=1}^{N-1} (-\omega \hat{c}_{n+1}^\dagger \hat{c}_n + \Delta \hat{c}_{n+1}^\dagger \hat{c}_n^\dagger + \text{h.c.} + U(2\hat{n}_n - 1)(2\hat{n}_{n+1} - 1))$$
$$- \sum_{n=1}^{N} \mu_n (\hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n - 1/2)$$

就有

$$H = \sum_{n=1}^{N-1} \left[-\frac{i}{2} \Big((\omega - \Delta) \hat{a}_n \hat{b}_{n+1} - (\omega + \Delta) \hat{b}_n \hat{a}_{n+1} \Big) - U \hat{a}_n \hat{b}_n \hat{a}_{n+1} \hat{b}_{n+1} \right]$$
$$- \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{N} \mu_n \hat{a}_n \hat{b}_n \tag{4}$$

Localization 的可行性

在有相互作用的情况下，localization 在某些参数下是更容易实现的。[2]

首先考虑 $\mu = 0, \omega = \Delta$ 这种简单的参数。

$$H = \sum_{n=1}^{N-1} \left[\frac{i}{2}(\omega + \Delta)\hat{b}_n \hat{a}_{n+1} - U \hat{a}_n \hat{b}_n \hat{a}_{n+1} \hat{b}_{n+1} \right]$$

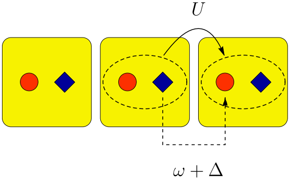


Figure: 两种跃迁机制

如果仍然当成粒子的话，Majorana Fermion 有两种机制能够跳到临近的 site，相干相消则能提供 local 的激发。

[2]这是刘雄军老师提的一个 argument

回到一般的 Hamiltonian：相互作用项给我们的 Heisenberg 方程加入了非线性成分，以 α 成分为例，仍然写出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{a}_n}{\mathrm{d}t} =& -(\omega+\Delta)\hat{b}_{n-1} - (\omega-\Delta)\hat{b}_{n+1} - \mu_n \hat{b}_n \\ &+ 2iU\hat{b}_n(\hat{a}_{n-1}\hat{b}_{n-1} + \hat{a}_{n+1}\hat{b}_{n+1})\end{aligned} \tag{5}$$

如何处理这种非线性的关系？是否仍然使用 Majorana 算符进行构造？待续

今天早上跑出来的

$N = 100$ 的能谱

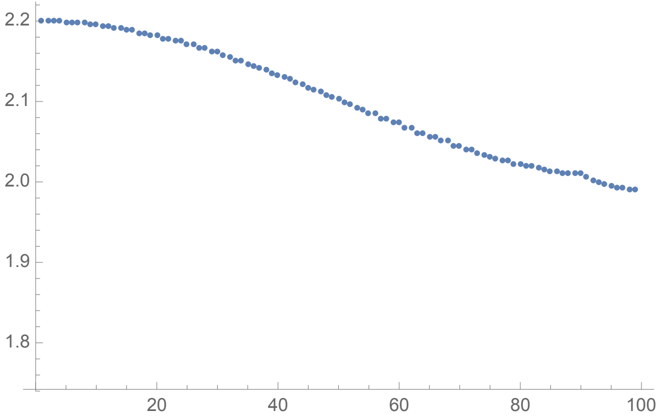


Figure: 仍然看到一些奇怪的东西

今天早上跑出来的

$N = 100$ 的低能激发波函数

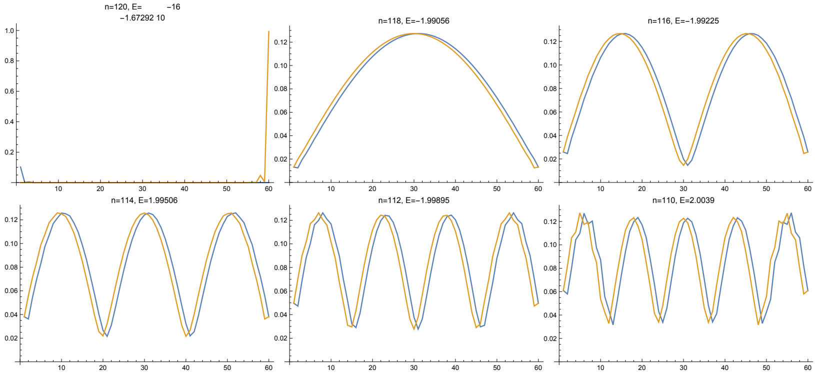


Figure: 最小的 6 个电子型激发的 “波函数”。非常平滑的正弦形式不知道代表啥。